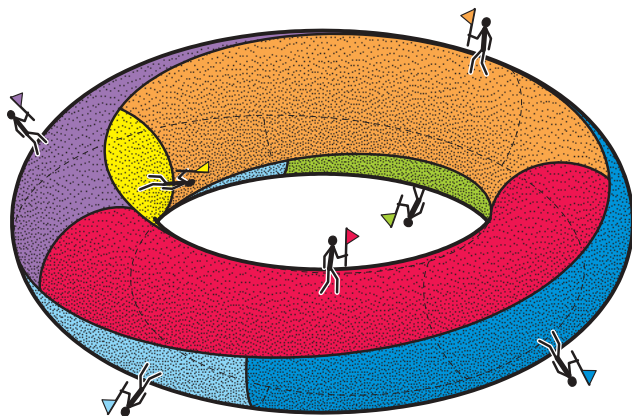


Библиотека  
«Математическое просвещение»  
Выпуск 27

---

С. Г. Смирнов

# ПРОГУЛКИ ПО ЗАМКНУТЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ



---

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
Москва • 2003

УДК 515.16  
ББК 22.152  
С50

### Аннотация

Изучение замкнутых поверхностей началось в XVIII веке с теоремы Эйлера:  $V - P + G = 2$  для всякого выпуклого многогранника. Но для невыпуклых многогранников выражение  $\chi = V - P + G$  может принимать совсем другие значения. Приняв значение  $\chi$  за численную характеристику поверхности, мы получаем её первый топологический инвариант: он позволяет доказать, например, что тор не эквивалентен кренделю. Но различить таким образом тор и бутылку Клейна не удаётся: нужен другой инвариант, выражающий ориентированность поверхности. В конце XIX века Пуанкаре навёл алгебраический порядок среди всех замкнутых поверхностей. Одновременно Хивуд связал эйлерову характеристику  $\chi$  с наименьшим числом цветов, необходимых для раскраски любой карты на данной поверхности. В XX веке геометры стали изучать поверхности с новой точки зрения: какие из них являются границами неких тел, и какие из них можно изобразить в пространстве без самопересечений. Пути решения этих проблем рассмотрены в брошюре.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей: школьников, студентов, учителей.

*Издание осуществлено при поддержке  
Департамента образования г. Москвы  
и Московской городской Думы.*

ISBN 5-94057-120-4

© С. Г. Смирнов, 2003.

© МЦНМО, 2003.

*Сергей Георгиевич Смирнов.*

Прогулки по замкнутым поверхностям.

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“». Вып. 27).

М.: МЦНМО, 2003. — 28 с.: ил.

Редактор А. Б. Сосинский.

Техн. редактор М. Ю. Панов.

Корректор Т. Л. Коробкова.

---

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано в печать 10/X 2003 года. Формат бумаги  $60 \times 88 \frac{1}{16}$ . Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Физ. печ. л. 1,75. Усл. печ. л. 1,71. Уч.-изд. л. 1,72. Тираж 3000 экз. Заказ 3922.

---

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.  
119002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 05 00.

---

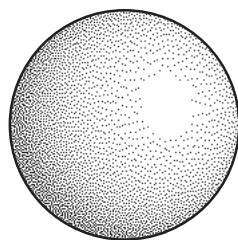
Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНТИ».  
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

## § 1

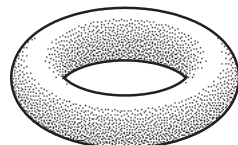
Биологи привыкли делить историю жизни на Земле на три эры: палеозой (эру трилобитов), мезозой (эру динозавров) и кайнозой (эру млекопитающих животных). Всю историю математики тоже можно разделить на три эры. Античность (или научный палеозой) замечательна тем, что её учёные люди (Пифагор, Архимед, Цзу Чун-чжи и их коллеги в Элладе и Китае) хорошо знали целые числа и простые фигуры — вроде куба или параболы, но не ведали позиционной записи чисел. Научный мезозой начался в XVII веке — когда первый динозавр (Рене Декарт) ввёл на плоскости числовые координаты, записал уравнения несложных кривых линий и начал изучать графики функций путём их математического анализа. В XIX веке эта сфера знаний достигла совершенства: тогда первый млекопитающий (Георг Риман) применил все накопленные методы работы к изучению гладких *многообразий*. В течение кайнозоя (XX век) новая наука о многообразиях (алгебраическая топология, основанная «индрикотерием» — Анри Пуанкаре) объединила вокруг себя все прочие ветви математики в единое дерево — развесистое и обильно плодоносящее в наши дни.

Самые простые многообразия имеют размерность 2 и называются *замкнутыми поверхностями*. Ими мы займёмся, начав с простого определения: *замкнутой поверхностью* называется любая ограниченная (компактная) фигура, около каждой своей точки устроенная так же, как обычная плоскость.

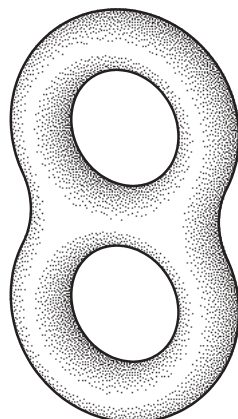
Примеры замкнутых поверхностей знакомы всем — это сфера (поверхность шара — или колобка), тор (поверхность бублика) и крендель (с двумя или большим количеством дырок в тесте), рис. 1.



СФЕРА



ТОР

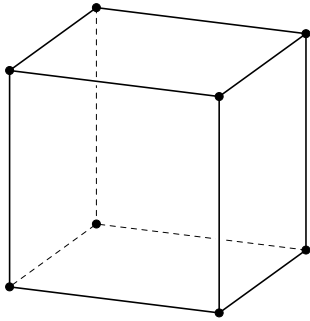


КРЕНДЕЛЬ  
С ДВУМЯ ДЫРКАМИ

Рис. 1

## § 2

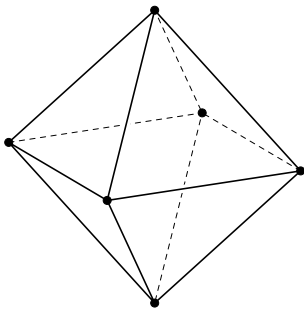
Поглядев на этот ряд фигур, неизбежно задаёшь вопрос: можно ли их отличить друг от друга иначе, чем «на глазок»? Сможет ли их различить компьютер по каким-нибудь числовым характеристикам этих поверхностей? Например, если мы нарисовали



КУБ

$$V=8, P=12, \Gamma=6;$$

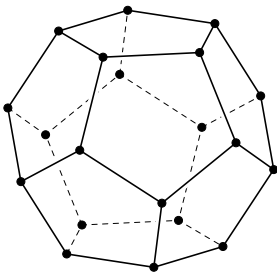
$$V-P+\Gamma=2$$



ОКТАЭДР

$$V=6, P=12, \Gamma=8;$$

$$V-P+\Gamma=2$$



ДОДЕКАЭДР

$$V=20, P=30, \Gamma=12;$$

$$V-P+\Gamma=2$$

Рис. 2

на некой поверхности карту — отгадает ли компьютер, на какой поверхности она нарисована?

Вопросы такого рода приходили в голову даже динозаврам в мезозойскую эру — т. е. в XVII веке, в эпоху Ришелье и д'Артаньяна. Кстати, именно тогда были построены первые компьютеры — механические арифмометры. Их построил Блез Паскаль (1623—1662) — коллега и конкурент Декарта в создании аналитической геометрии. А сам Рене Декарт (1596—1650) заметил неожиданное общее свойство всех правильных многогранников: для любого из них  $V-P+\Gamma=2$ , где  $V$  — число вершин многогранника,  $P$  — число его рёбер,  $\Gamma$  — число его граней, рис. 2.

Сделав это наблюдение, Декарт обрадовался: как будет хорошо, если это свойство выделяет правильные многогранники среди всех прочих! Но вскоре пришло отрезвление: формула  $V-P+\Gamma=2$  верна для всех выпуклых многогранников, и для многих невыпуклых — тоже. Разочарованный таким «ненужным» открытием, Декарт оставил эту тему потомкам — следующему поколению математических динозавров.

### § 3

Прошло полвека, прежде чем на свет появился очередной великий математик — Леонард Эйлер (1707—1783). В эту пору научные динозавры перестали работать в уединении, подобно Декарту и Паскалю. Они сбивались в стаю, называли её академией наук и вместе обсуждали самые важные проблемы. Четыре самые авторитетные академии возникли в Лондоне (1662), в Париже (1666), в Берлине (1700) и в Петербурге (1724). Именно в Петербург приехал 20-летний Эйлер со своим другом — Даниилом

Бернулли (1700—1782). Позднее оба друга стали первыми академиками всех четырёх академий Европы.

Молодой Эйлер был готов заниматься любой точной наукой, какая под руку попадётся. То он в одиночку и вручную обрабатывал данные первой российской переписи населения; то читал лекции по исчислению дифференциалов и интегралов для будущих морских офицеров; то упражнялся в дешифровке очередного тайного послания какого-нибудь иностранного посла к своему монарху. В перерывах между этими важными делами Эйлер искал и находил новые задачи из «чистой» математики — и решал их, если хватало времени и сил.

Именно тогда Эйлер открыл для себя большую теорему Ферма — и доказал её для степеней 3 и 4, а дальнейшую работу оставил для новой научной молодёжи (работы им хватило на 250 лет). Тогда же Эйлер переоткрыл формулу Декарта для выпуклых многогранников ( $B - P + \Gamma = 2$ ) — и доказал её очень простым способом, выявляющим главную суть дела.

Действительно, если эта формула верна для всех выпуклых многогранников, то чьё же свойство она выражает? Наверное, это свойство сферы — той замкнутой поверхности, на которой можно нарисовать контур любого выпуклого многогранника, состоящий из вершин ( $B$ ) и рёбер ( $P$ ). При этом сфера разбивается на столько областей, сколько граней ( $\Gamma$ ) у исходного многогранника. Иными словами, поверхность любого выпуклого многогранника взаимно однозначно деформируема в сферу путём сжатий или растяжений — но без разрывов или склеек<sup>1</sup>).

#### § 4

После такого переосмысления теорема Эйлера о многогранниках приобрела очень простую формулировку и доказательство.

Всякое вложение связного графа с  $B$  вершинами и  $P$  рёбрами в сферу разбивает её на  $\Gamma$  областей, причём  $B - P + \Gamma = 2$ .

**Доказательство.** Пусть на сфере нарисован произвольный связный граф с  $B$  вершинами и  $P$  рёбрами, разбивающий её на  $\Gamma$  областей. Мы будем последовательно упрощать наш граф, уменьшая числа его рёбер и вершин, но так, чтобы сумма  $B - P + \Gamma$  сохранялась при всех упрощениях. Если после всех упрощений будет выполнено условие  $B - P + \Gamma = 2$ , значит, оно выполнялось и для исходного графа. Упрощения графа будут двух сортов.

1°. **Стягивание** в точку одного ребра, соединяющего две разные вершины. Такая операция уменьшает на единицу число вершин графа ( $B$ ) и точно так же уменьшает число его рёбер ( $P$ ).

---

<sup>1</sup>) Такую деформацию математики XX века назвали *гомеоморфизмом* фигур: это понятие нам пригодится позже.

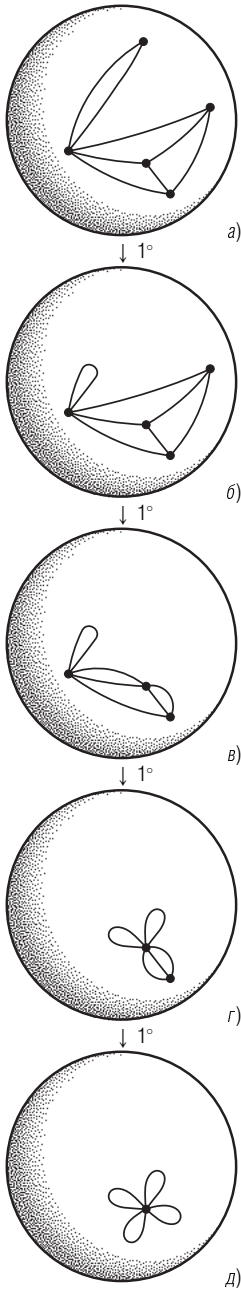


Рис. 3

Число областей ( $\Gamma$ ), на которые граф делит сферу, при этом не изменяется — так что сумма  $B - P + \Gamma$  сохраняется<sup>1)</sup> (рис. 3, а—д).

Наша операция 1° может увеличить число петель в графе — но это нам не мешает. Напротив, наша промежуточная цель — сделать число вершин графа ( $B$ ) равным 1 (рис. 3, д). Такой граф называется *букетом петель*; упростить его дальше с помощью операции 1° невозможно; поэтому мы вводим следующую операцию.

2°. Пусть на сфере лежит букет петель; мы уберём одну из них. Тогда число областей ( $\Gamma$ ), на которые делит сферу новый граф (он — тоже букет петель), на единицу меньше, чем было у исходного графа. Значит, сумма  $B - P + \Gamma$  сохраняется при преобразовании 2°.

Ясно, что таким образом мы можем уменьшить число рёбер графа до нуля; граф превратится в одну точку на сфере, а для такого графа  $B - P + \Gamma = 1 - 0 + 1 = 2$ . Доказательство теоремы Эйлера закончено.

## § 5

Теперь мы построим контрпример к теореме Эйлера с помощью невыпуклого многогранника, нарисованного на торе (рис. 4). Для этого многогранника  $B - P + \Gamma = 0$ !

Итак, для некоторых вложений некоторых графов в тор сумма  $B - P + \Gamma$  равна нулю — а не двойке, как на сфере. Верно ли это для любого вложения любого графа в тор? К сожалению, нет. Например, окружность (т. е. граф с одной вершиной и одной петлёй) можно вложить в тор двумя способами: либо так, что окружность уместится в маленьком круге (как на сфере), либо так, что она станет меридианом тора или его параллелью (рис. 5, а—в). В случае а окружность разбивает тор на две области; в случаях б и в дополнение к окружности в торе связно — значит, область одна.

<sup>1)</sup> З а м е ч а н и е. В графе некоторые пары вершин могут быть соединены несколькими рёбрами, а для некоторых рёбер (*петель*) начало и конец могут совпадать.

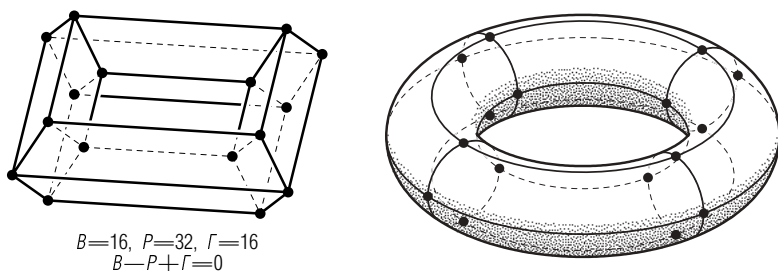


Рис. 4

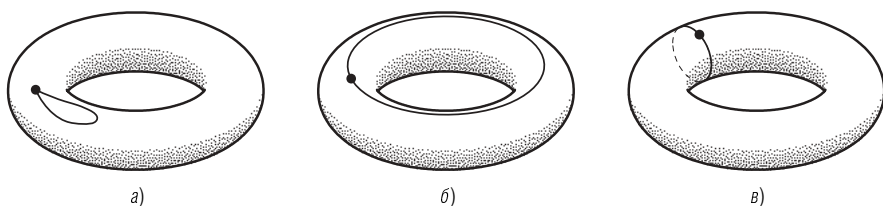


Рис. 5

Конечно, Эйлер заметил разницу между этими картинками — и нашёл условие, необходимое для одинаковых значений суммы  $B-P+\Gamma$  при разных вложениях графа в тор или более сложную поверхность.

Заметим, что при подсчёте суммы  $B-P+\Gamma$  мы должны считать, что любая область из дополнения к графу  $K$ , вложенному в поверхность  $M$ , гомеоморфна кругу без границы.

На сфере это условие выполнено для любого вложения любого связного графа. Но на торе это не всегда так. Минимальный граф, правильно разбивающий тор — это букет двух петель: параллели и меридиана. Дополнение к такому графу состоит из одной правильной области, так что  $B-P+\Gamma=1-2+1=0$ . Сходные разбиения можно построить на кренделе с  $k$  «дырками»: в этом случае сумма  $B-P+\Gamma$  принимает значение  $2-2k$ . (Постройте на кренделе с двумя «дырками» букет петель, удовлетворяющий условию Эйлера. Сколько петель для этого потребуется?)

К сожалению, Эйлеру не удалось придумать строгое доказательство формулы  $B-P+\Gamma=2-2k$  для любого графа, лежащего на кренделе с  $k$  дырками и правильно разбивающего эту поверхность. Эйлер оставил эту задачу своим преемникам, надеясь на дерзость и смекалку новых динозавров. Потомки не подвели Эйлера — хотя ждать успеха пришлось долго. Доказать корректность определения эйлеровой характеристики сумел только Анри Пуанкаре в конце XIX века — когда эра динозавров в математике сменялась эрой млекопитающих.

## § 6

Но ещё в середине XIX века сразу несколько дерзких математиков задались простым вопросом: все ли возможные замкнутые поверхности обнаружил Эйлер? Видно, что для «кренделей» сумма  $B - P + G$  (её называли *эйлеровой характеристикой поверхности*) принимает чётные значения. Нет ли поверхности с нечётной эйлеровой характеристикой? Например, можно ли построить поверхность и правильный граф на ней, для которых  $B - P + G = 1$ ?

Оказывается, можно! Такую поверхность впервые построил Георг Риман (1826—1866) — ученик великого математика Карла Гаусса и лучший геометр своего времени. Исследуя геометрию фигур на сфере, Риман заметил интересный факт: окружности наибольшего радиуса играют на сфере ту же роль, что прямые на плоскости! Ведь отрезок большой окружности является кратчайшей линией, соединяющей две любые точки на сфере. Правда, геометрия Римана на сфере резко отличается от геометрий Евклида или Лобачевского на плоскости. В ней вовсе нет параллельных «прямых», ибо любые две окружности наибольшего радиуса пересекаются в двух концах некоторого диаметра сферы!

Сам по себе этот факт не шокировал современников Римана. Они успели привыкнуть к геометрии Лобачевского, где через любую точку вне «прямой» можно провести много разных «прямых», не пересекающих данную «прямую». Ну, а если «псевдопараллельных» прямых бывает много — значит, может не быть и ни одной! Но вот пересечение двух прямых в двух разных точках — это неестественно. Разные прямые должны пересекаться в одной точке — либо вовсе не пересекаться!

Так думал и Риман; поэтому он решил «исправить» сферу, склеив каждую её точку с другой точкой — диаметрально противоположной. То, что получилось в результате, современники Римана назвали *проективной плоскостью* — благо эту странную поверхность давным-давно построили иным путём и использовали французские геометры во главе с Жераром Дезаргом, современником Декарта и Паскаля.

## § 7

Интересно, что оба первооткрывателя — Дезарг и Риман — воспринимали необычную проективную плоскость лишь как удобную модель, где воплощена нужная система геометрических преобразований или удобная система аксиом. О том, как выглядит вся проективная плоскость — «вблизи» или «в целом», первым задумался другой ученик Гаусса — Август Мёбиус (1790—1868), пожилой и скромный профессор астрономии и геометрии. Он начал с чертежа проективной плоскости, используя как заготовку привычный чертёж куба.



Из определения проективной плоскости по Риману следует, что на ней всего будет вдвое меньше, чем на сфере. Не шесть граней, а три; не восемь вершин, а четыре; не 12 рёбер, а только шесть (рис. 6). Поэтому эйлерова характеристика  $B - P + G$  проективной плоскости равна 1.

Забудем ненадолго о «приполярных» областях сферы и займёмся тем, что происходит вблизи её экватора, когда там склеиваются вместе все пары диаметрально противоположных точек. Из четырёх боковых граней куба две соседние исчезают; зато две другие соседки склеиваются вместе своими параллельными рёбрами — но не так, как мы привыкли изготавливать цилиндр из прямоугольной бумажки, а с поворотом ребра-отрезка вокруг его середины (рис. 7, а). Эту склейку вы, наверное, когда-то в детстве выполняли сами — и знаете, что полученная вами «перекрученная на  $180^\circ$ » лента называется «листом Мёбиуса» (рис. 7, б). Почему её не заметили Декарт или Дезарг, Эйлер или Риман? Наверняка замечали — но не придали большого значения случайной находке, не укладывающейся в красивую общую теорию. А вот Мёбиус оценил свою находку по достоинству — и нечаянно обрёл на склоне лет научное бессмертие. Урок для всех добрых молодцев: следите внимательно за любыми чудесами вокруг себя — особенно за теми, о которых вам никто не сообщил заранее!

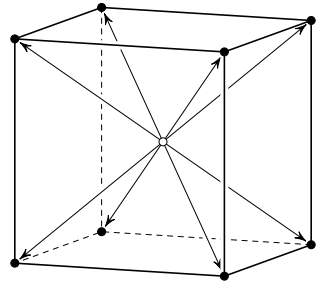


Рис. 6

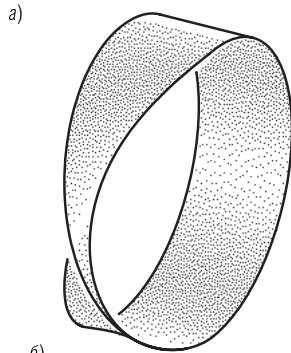


Рис. 7

## § 8

Итак, лист Мёбиуса составляет главную часть проективной плоскости — её более сложную половину. Другая половина той же плоскости получается из «приполярной» области сферы — т. е. из обычного круга, который приклеивается к листу Мёбиуса по их общему краю — окружности. Здесь нас ожидает новое «чудо»: интуитивно ясно, что эту приклейку нельзя произвести в пространстве без самопересечений! Спасибо интуиции — она нас не обманывает. Действительно: в отличие от сферы, тора или

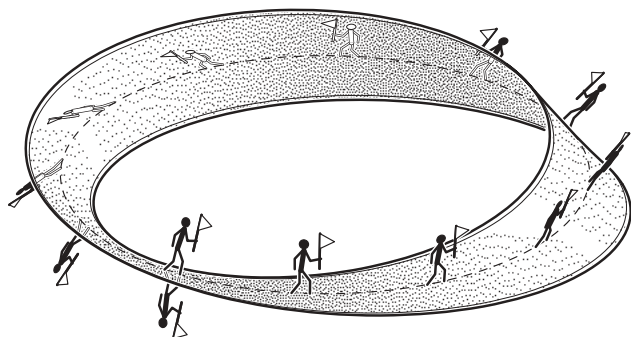


Рис. 8

кренделя, проективную плоскость нельзя вложить в обычное пространство без кратных точек самопересечения! Дело в том, что всякая замкнутая поверхность, лежащая в трёхмерном пространстве, разделяет его на две части — ограниченную «внутренность» и неограниченную «внешность», подобно тому, как замкнутая кривая разделяет плоскость на две части.

Но известно, что лист Мёбиуса — поверхность односторонняя. Пройдя вдоль всей его «средней линии» с поднятым вверх флажком, мы вернёмся в исходную точку — но флажок будет теперь «поднят» в другую сторону (рис. 8)! Это значит, что флажок, не пересекая проективную плоскость, попал из «внешности» во «внутренность» дополнения к ней. Значит, у дополнения к проективной плоскости в пространстве нет отдельной «внешности» и отдельной «внутренности»! То же верно для любой замкнутой поверхности, содержащей хотя бы один лист Мёбиуса и расположенной в пространстве. Оттого все эти поверхности не вкладываются, а только погружаются в трёхмерное евклидово пространство. Зато в четырёхмерное пространство они вкладываются без самопересечений — но об этом речь пойдёт ниже.

### § 9

Вспомним, как тор  $P_1$  породил бесконечное семейство кренделей  $P_k$  с помощью «связной суммы поверхностей» (рис. 9).

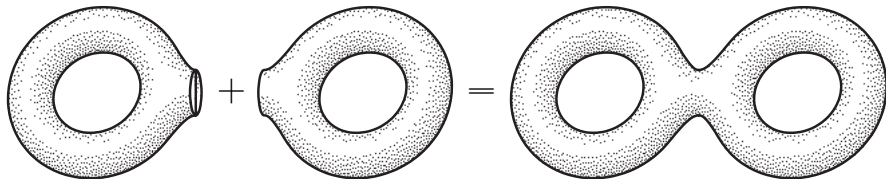


Рис. 9

Точно так же проективная плоскость  $H_1$  порождает бесконечное семейство поверхностей  $H_k$ . Все они, в отличие от кренделей, не ориентируемы. Нетрудно заметить и подсчитать (сделайте это!), как преобразуется эйлерова характеристика поверхностей при их связной сумме:  $\chi(A+B) = \chi(A) + \chi(B) - 2$ . Поэтому  $\chi(H_k) = 2 - k$ .

Упомянутый выше геометр Анри Пуанкаре (1854—1912) доказал (когда пришла пора для таких открытий), что любые две замкнутые поверхности с разными эйлеровыми характеристиками не гомеоморфны друг другу. Он доказал также, что любая ориентируемая поверхность не гомеоморфна любой неориентируемой поверхности. Пути этих доказательств мы рассмотрим ниже; пока важно заметить, что все фигуры  $P_k$  и  $H_k$  попарно различны, даже с точки зрения топологии — самой общей ветви геометрической науки. Но прежде чем углубиться в эти тайны, геометры пожелали увидеть чертежи всех фигур  $H_k$ . Пусть это будут картинки с самопересечениями — лишь бы их можно было охватить единым взором!

Сказано — сделано. Первого успеха в изготовлении портрета поверхности  $H_2$  достиг в 1870 году молодой и везучий немец Феликс Клейн (1849—1925) — достойный преемник рано умершего Римана, будущий соперник Пуанкаре и друг Гильберта. Его простую картинку до сих пор называют «бутылкой Клейна» (рис. 10).

Видно, что эту бутылку (как и тор) можно изготовить из обычного цилиндра. Но склеивать основания цилиндра здесь придётся иначе: зеркально отразив окружность-торец относительно её диаметра. Заметим ещё, что самопересечение бутылки Клейна устроено довольно скромно: всего одна окружность, вдоль которой вытянутое горлышко бутылки прорезало её бок. Можно ли изобразить сходным путём проективную плоскость?

Да, можно! Для этого нужно заметить, что бутылка Клейна имеет плоскость симметрии, которая рассекает её на две одинаковые половины (рис. 11). Каждая половина представляет собой лист Мёбиуса, вложенный в полупространство весьма своеобразно: пересекая себя вдоль отрезка и так, что весь край листа Мёбиуса уместился в краю полупространства! А теперь вспомним, как старик Мёбиус разложил проективную плоскость на две части — на лист Мёбиуса и круг, склеенные по общему краю. Мы уже погрузили лист Мёбиуса в полупространство. Нам остаётся погрузить в другое полупространство круг — но не как попало, а так, чтобы край круга лежал в краю полупространства точно так, как в нём лежит край листа Мёбиуса!

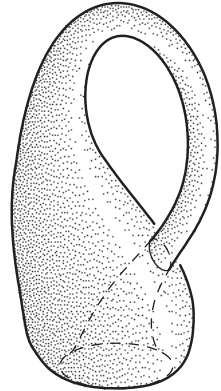


Рис. 10

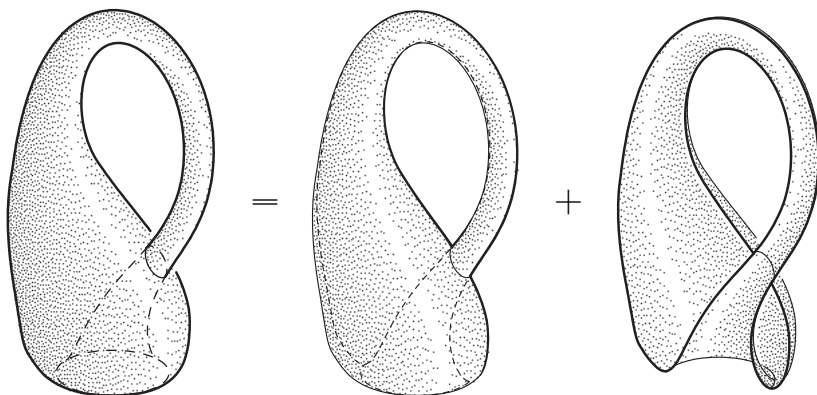


Рис. 11

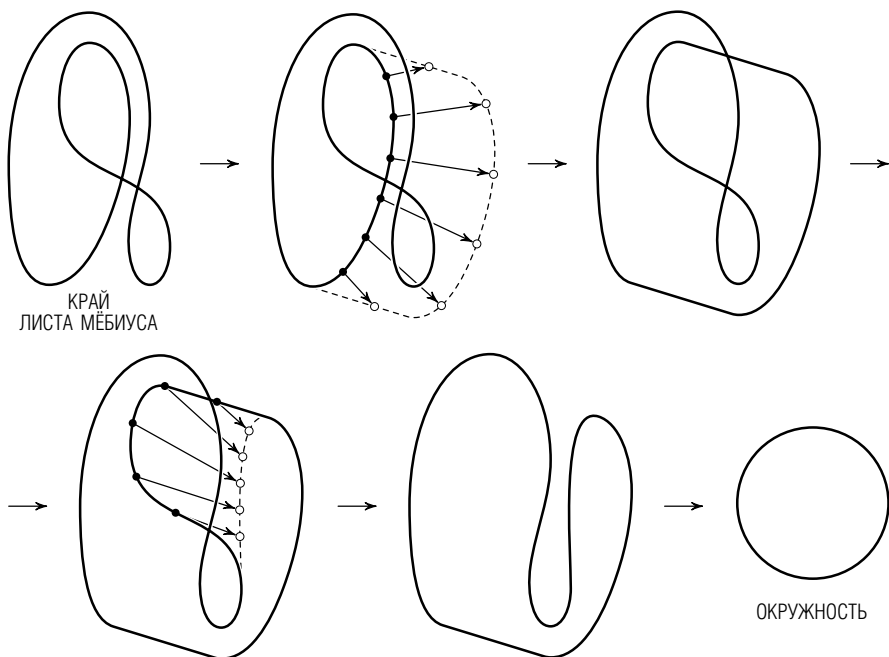


Рис. 12

Сделаем это. Рассмотрим край листа Мёбиуса, погружённый в плоскость, как обычное погружение окружности — и начнём двигать эту окружность по плоскости, допуская самопересечения, но не допуская изломов кривой (рис. 12).

Рассмотрим след этого движения окружности по плоскости. Он задаёт погружение цилиндра в толстый «ломоть» пространства, заключённый между двумя параллельными плоскостями (рис. 12). В верхнем краю ломтя лежит погружённая окружность (край листа Мёбиуса), а в нижнем — вложенная окружность, которую легко продолжить до вложения круга. Вот и всё! Теперь погружение проективной плоскости в обычное пространство можно составить из трёх частей: из погружения листа Мёбиуса в верхнее полупространство, из погружения цилиндра в ломоть пространства согласно рис. 12 и из вложения круга в нижнюю граничную плоскость ломтя.

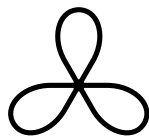


Рис. 13

Обратим внимание на множество всех кратных точек построенного нами погружения проективной плоскости в евклидово пространство. Наблюдая за изменением семейства двойных точек самопересечения окружности при её регулярной гомотопии по плоскости, можно заметить то единственное мгновение, когда появилась и сразу исчезла одна тройная точка будущего погружения поверхности. Весь ансамбль кратных точек проективной плоскости в трёхмерном пространстве выглядит, как лист клевера (рис. 13).

В этом букете каждая петля состоит из двойных точек, но узловая точка букета — тройная. Около неё три разных листа погружённой проективной плоскости пересекаются попарно ортогонально — как три координатные плоскости  $Oxy$ ,  $Oxz$ ,  $Oyz$  возле начала координат  $O$ .

## § 10

А теперь мы попробуем вложить проективную плоскость в четырёхмерное евклидово пространство без самопересечений. Увидеть эту картинку целиком нашими трёхмерными глазами, конечно, невозможно — и не нужно. Всё, что происходит в четырёхмерном пространстве, можно описать словами и изобразить на трёхмерном чертеже столь же успешно и точно, как мы изображаем трёхмерные тела на плоских чертежах.

Например, трёхмерное пространство есть произведение плоскости на прямую. Точно так же четырёхмерное пространство есть произведение обычного пространства на прямую. Выделим в этом произведении четырёхмерный «толстый ломоть» — произведение трёхмерного пространства на отрезок — и вложим в верхнее основание ломтя лист Мёбиуса, а в его нижнее основание — круг. Вспомним, что край листа Мёбиуса не образует в обычном пространстве узла. Поэтому его можно непрерывным движением без самопересечений превратить в окружность, стандартно вложенную в плоскость и ограничивающую в ней круг.

Значит, мы можем дополнить наши две вложенные фигуры — лист Мёбиуса в верхнем основании четырёхмерного ломтя и круг в его нижнем основании — вложением в тело ломтя двумерного цилиндра, согласно следу движения, «развязывающего» край листа Мёбиуса в пространстве. Объединение всех трёх вложенных фигур — листа Мёбиуса, цилиндра над его краем и диска, замыкающего другой край цилиндра — даёт нам вложение проективной плоскости в евклидово пространство размерности 4.

Аналогично можно вложить в четырёхмерное пространство связную сумму любого числа проективных плоскостей — т. е. любую из известных нам замкнутых неориентируемых поверхностей  $H_k$ . Нам осталось только доказать, что все возможные замкнутые поверхности нам уже известны!

Для этого нужно сделать очередной прыжок на 60 лет вперёд: из эпохи молодого немца Феликса Клейна и юного француза Анри Пуанкаре перескочить в эпоху молодого американца Марстона Мorsa, когда стариков Клейна и Пуанкаре уже не будет в живых. На дворе будет 1930 год — расцвет эры млекопитающих в ноосфере — учёном сообществе матушки Земли.

Если считать гениального Римана первым среди притких новых зверей (кем-то вроде первой лошадки — эгиппуса), а могучего первопроходца топологии — Анри Пуанкаре уподобить индрикотерию (который мог шутя перешагнуть через обычного слона), то Марстон Морс (1892—1977) оправдал значение своей английской фамилии: Морж. Он спокойно и уверенно переплыл такое море, которое старшие сухопутные коллеги по привычке считали непроходимым. Вероятно, Пуанкаре мог бы сделать это раньше — но недосуг было, за прочими великими делами!

## § 11

Молодой Морс начал с простого замечания: каждую из известных замкнутых поверхностей (будь то сфера или тор, проективная плоскость или бутылка Клейна) можно разложить в объединение нескольких лент — либо плоских, как обычное кольцо, либо кручёных — как лист Мёбиуса. Тор составлен из двух таких

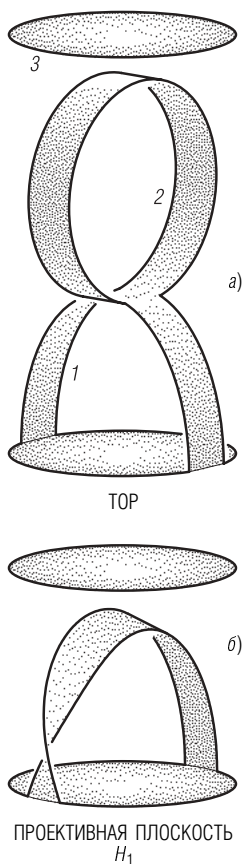


Рис. 14

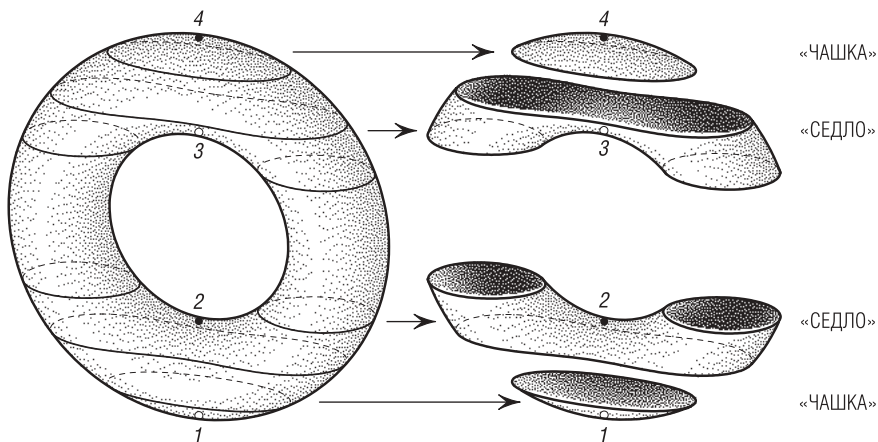


Рис. 15

лент, последовательно приклеенных к краю круга крест-накрест (рис. 14, а). Первая из этих лент (1) превращает край круга (окружность) в край кольца (это — две окружности). Вторая лента (2) восстанавливает связность края и позволяет нам заклеить этот край «крышкой» — кругом (3) так, что мы получаем замкнутую ориентируемую поверхность.

Соорудить неориентируемую поверхность из лент ещё проще. Ведь край листа Мёбиуса связан; поэтому приклейка к кругу любого набора кручёных лент оставляет край поверхности связным — и мы в любой момент можем заклеить этот край крышкой (рис. 14, б). Так и получаются два семейства замкнутых поверхностей:  $P_k$ , где число плоских лент чётно, и  $H_k$ , где число кручёных лент любое.

Как же доказать, что всякая замкнутая поверхность  $M$  составлена из плоских либо кручёных лент? Морс нашёл удивительно простой ход к цели. Достаточно задать на поверхности  $M$  любую гладкую числовую функцию  $F$  — и проследить, как изменяется множество меньших значений этой функции по дороге от её минимума к максимуму!

Возьмём тор: поставим его на стол и сопоставим каждой точке тора число, равное её высоте над столом. Видно, что множество меньших значений  $M(F)$  существенно изменяется четырежды: при проходе через все критические точки функции  $F$ , где касательная плоскость к её графику горизонтальна (рис. 15).

Около точек минимума и максимума график функции  $F$  устроен как чашка, открытая вверх (минимум) или вниз (максимум). Около промежуточных точек график  $F$  выглядит как седло: при

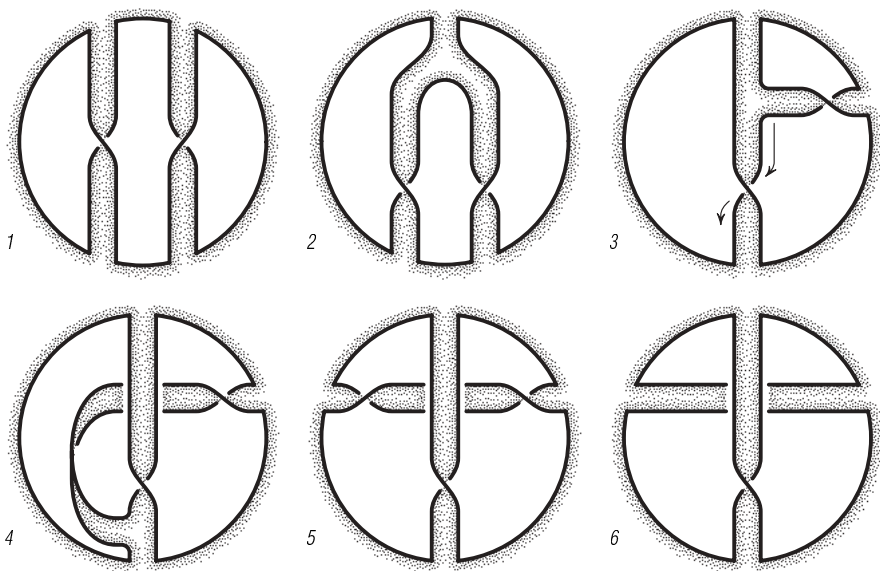


Рис. 16

проходе через него (будь то снизу вверх или сверху вниз) к краю множества меньших (или бóльших) значений функции приклеивается лента — либо плоская, либо кручёная.

Морс доказал (это было не трудно), что на любой замкнутой поверхности любую числовую функцию можно преобразовать в «хорошую» функцию — с одной точкой минимума, одной точкой максимума и несколькими седловыми точками. Поэтому всякая замкнутая поверхность склеена из лент — либо только из плоских, либо только из кручёных, либо из тех и других попеременно. Но оказалось, что «смешанных» поверхностей не бывает: приклейка двух кручёных лент порождает такую же фигуру, как приклейка одной плоской и одной кручёной ленты (рис. 16).

Вот так Марстон Морс сумел перечислить все возможные замкнутые поверхности — и не только их, ибо теория Морса оказалась применима к изучению многообразий любой размерности. А теперь вернёмся на одно поколение назад — в 1890-е годы, когда Морс родился, а Пуанкаре сумел решить проблему, поставленную Риманом: как различить любые поверхности, не гомеоморфные друг другу? Видно, не случайно Анри Пуанкаре родился в тот год (1854), когда Георг Риман прочёл перед лицом старого Карла Гаусса знаменитую лекцию о ведущей роли многообразий в обновлённой геометрии!



## § 12

Вспомним, что в XVIII веке Эйлер учредил арифметическую топологию — когда он начал различать замкнутые поверхности по значению на них арифметической суммы  $B - P + G$ . В начале XIX века Лагранж, Абель и Галуа ввели в математику новое понятие *группы* — для того, чтобы «исчислять» преобразования фигур, которые не всегда удаётся записать целыми числами. В конце XIX века Пуанкаре превратил арифметическую топологию в *алгебраическую* топологию: для этого он ввёл в геометрию фундаментальную группу  $\Pi(\Phi)$  произвольной фигуры  $\Phi$ .

Описать эту группу не трудно: все её элементы суть петли с общей вершиной на фигуре  $\Phi$ , причём две петли эквивалентны (*гомотопны*), если одна из них переводится в другую непрерывным движением (*гомотопией*). Перемножить две петли — значит, пройти их одну за другой в определённом порядке. Ясно, что фундаментальная группа у большинства фигур не коммутативна — и вычислять её не легко. Ещё труднее доказать, что две разные группы не изоморфны друг другу. Но эта задача облегчается в случае, когда обе группы коммутативны. Оттого топологи часто добавляют в фундаментальную группу тождество коммутативности:  $AB = BA$  для любых элементов  $A$  и  $B$ . Уж если две сомнительные группы оказались не изоморфны после того, как мы их прокоммутировали — значит, они и прежде были не изоморфны друг другу!

Именно так получается с фундаментальными группами замкнутых поверхностей. Пуанкаре заметил, что петли, порождающие фундаментальную группу  $\Pi(\Phi)$  поверхности  $\Phi$ , соответствуют тем лентам (плоским или кручёным), из которых склеена поверхность  $\Phi$ . А ещё в группе  $\Pi(\Phi)$  есть одно соотношение: оно возникает, когда мы приклеиваем завершающий круг к краю объединения всех лент, составляющих нашу поверхность  $\Phi$  (см. рис. 14).

## § 13

Например, в случае проективной плоскости мы приклеили завершающий круг к краю листа Мёбиуса, который обегает его среднюю линию два раза. Оттого группа  $\Pi(\Phi)$  поверхности  $H_1$  задана одним элементом  $a$  и одним соотношением:  $a \cdot a = e$ . Это — знакомая вам группа  $\mathbb{Z}_2$  вычетов по модулю 2; она состоит из двух элементов. Вскоре мы увидим, что у всех прочих замкнутых поверхностей фундаментальные группы либо бесконечны, либо тривиальны (у сферы). Так мы единым махом доказали довольно сильное утверждение: проективная плоскость  $H_1$  не гомеоморфна никакой другой замкнутой поверхности. Вот для таких триумфов и создавалась алгебраическая топология!

Перейдём теперь к бутылке Клейна  $H_2$ . Она склеена из двух листов Мёбиуса; поэтому в её группе  $\Pi(\Phi)$  есть две образующие  $a, b$  и одно соотношение:  $a \cdot a \cdot b \cdot b = e$ . Если упростить эту группу путём коммутирования и заменить одну из образующих  $b$  на более сложную  $ab$ , то получится группа  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}_2$ . Аналогично, для более сложных поверхностей семейства  $H_k$  прокоммутированная фундаментальная группа  $\Pi(\Phi)$  изоморфна сумме  $(k-1)\mathbb{Z} + \mathbb{Z}_2$ . Как доказать, что все эти группы попарно не изоморфны?

Дело в том, что в каждой из этих групп есть лишь один элемент порядка 2. При любом изоморфизме таких групп их элементы порядка 2 переходят друг в друга. Профакторизовав по этим элементам наши группы, мы получим изоморфизм между более простыми группами:  $(k-1)\mathbb{Z} = (m-1)\mathbb{Z}$ . Но он возможен, только если  $k=m$ : иначе мы получили бы изоморфизм векторных пространств разных размерностей, невозможность которого была доказана ещё Гауссом. Точно так же доказывается попарная неизоморфность групп  $\Pi(\Phi)$  для разных кренделей  $P_k$ : их фундаментальные группы после коммутирования становятся изоморфны  $(2k)\mathbb{Z}$ . Наконец, изоморфизм групп  $k\mathbb{Z}$  и  $m\mathbb{Z} + \mathbb{Z}_2$  невозможен потому, что в одной из этих групп есть элемент порядка 2, а в другой такого элемента нет. Вот мы и разобрали алгебраическое (на языке теории групп) доказательство знаменитой теоремы Пуанкаре о том, что все известные замкнутые поверхности попарно не гомеоморфны.

## § 14

Что же делать дальше? Дальше в умной голове Анри Пуанкаре возник совсем наивный вопрос: чьи и поверхности (т. е. краями каких трёхмерных тел) являются известные нам замкнутые поверхности? Для поверхностей  $P_k$  всё ясно: согласно нашему построению, они ограничивают знакомые всем кренделя. Не очень трудно построить тело, краем которого служит бутылка Клейна: оно получится из бублика, если склеить попарно все его точки, симметричные относительно центра бублика (рис. 17).

Но для сферы похожая операция не проходит — потому что центр сферы находится внутри шара (а центр бублика лежит вне его). Результат склейки всех пар диаметрально противоположных точек шара не будет трёхмерным многообразием (устроенным около каждой точки так же, как обычное пространство) — потому что центр шара не с чем склеить! По этой причине нам не удаётся построить тело, ограниченное проективной плоскостью. Более того, эта поверхность

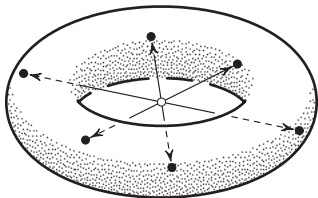


Рис. 17

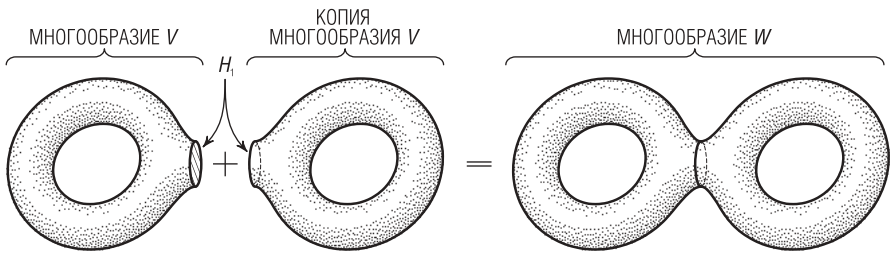


Рис. 18

не ограничивает никакого трёхмерного тела! Тако- го чуда не предвидел даже хитроумный и опытный геометр Анри Пуанкаре. Но, нечаянно обнаружив этот чудесный факт, Пуанкаре сумел доказать его — путём не очень сложных геометрических конструкций.

Оказалось, что только поверхности с чётными эйлеровыми характеристиками служат границами трёхмерных многообразий — потому, что эйлерова характеристика  $\chi(W) = B - P + \Gamma - \text{III}$  любого замкнутого трёхмерного многообразия  $W$  равна нулю.

Вывести первое утверждение из второго не сложно. Допустим, что проективная плоскость  $H_1$  является краем некоторого трёхмерного тела  $V$ . Возьмём два экземпляра этого тела и склеим их по их общему краю — так, как раньше мы склеивали два листа Мёбиуса, чтобы получить бутылку Клейна (рис. 18). Теперь мы получим замкнутое трёхмерное многообразие  $W$ : его строение нам не ясно, но мы знаем (со слов Пуанкаре), что эйлерова характеристика  $\chi(W)$  равна 0.

Из чертежа видно, что  $\chi(W) = 2\chi(V) - \chi(H_1)$ . Аналогично эйле- рова характеристика бутылки Клейна выражалась через эйлеровы характеристики листа Мёбиуса и его границы — окружности. Но там мы не получили арифметического противоречия, поскольку эйлеровы характеристики всех трёх фигур — участниц склейки — равнялись нулю. Здесь же одна из характеристик —  $\chi(H_1)$  — нечётна, а другая —  $\chi(W)$  — равна 0. Оттого наше равенство невыполнимо по модулю 2 — и тем более, в целых числах.

Наметим теперь схему доказательства того факта, что эйлерова характеристика  $B - P + \Gamma - \text{III}$  любого замкнутого трёхмерного многообразия  $W$  равна нулю. Проще всего вывести этот факт из теории Морса — используя те разложения многообразия  $W$  в объединение точек ( $B$ ), отрезков ( $P$ ), кругов ( $\Gamma$ ) и шаров ( $\text{III}$ ), которые задаются гладкими числовыми функциями на многообразии  $V$ . Рассмотрим сразу две такие функции:  $F$  и  $-F$ . Задаваемые ими суммы  $B - P + \Gamma - \text{III}$  должны быть равны — если эйлерова характеристика многообразия  $W$  определена корректно. Но из нечётности

размерности 3 следует, что все слагаемые суммы  $B - P + \Gamma - \text{III}$  для функции  $F$  имеют противоположные знаки, по сравнению с этими же слагаемыми в сумме  $B - P + \Gamma - \text{III}$  для функции  $-F$ . Значит,  $\chi(V) = B - P + \Gamma - \text{III} = 0$ .

Доказательство закончено: проективная плоскость не ограничивает никакого трёхмерного тела!

## § 15

Вот такие неожиданные геометрические факты открывал Анри Пуанкаре — основатель алгебраической топологии многообразий — в 1890-е годы, когда математический мезозой незаметно сменялся математическим кайнозоем, причём маститый Пуанкаре играл роль первого индрикотерия в обновлении древней (палеозойской) геометрии. Второй, младший индрикотерий — Давид Гильберт (1862—1943) перестраивал столь же древнюю теорию чисел на новый кайнозойский лад — так, чтобы она срослась воедино с новой кайнозойской алгеброй — теорией групп — и старой (мезозойской) алгебраической геометрией. А чем занимались в ту пору последние динозавры уходящего мезозоя?

В конце XIX века эта порода грозных ящеров сохранялась только в доброй старой Англии. Старый Чарльз Дарвин уже умер, и роль последнего динозавра играл Артур Кэли (1821—1895). Он вырос в далёком Петербурге, где успел увидеть живого Пушкина и царя Николая I. Вернувшись в Англию, удалой юноша окончил Кембридж и стал профессиональным адвокатом — но продолжал увлекаться всем на свете, от математики до альпинизма. Услышав, что его старший коллега Гамильтон придумал интересное некоммутативное умножение векторов в четырёхмерном пространстве, молодой Кэли решил не уступать сопернику. Он придумал в восьмимерном пространстве такое умножение векторов, которое даже не ассоциативно — но сохраняет многие полезные свойства комплексных чисел.

Тогда же Артур Кэли увлёкся давней и, оказывается, всё ещё не решённой задачей: хватит ли четырёх разных красок, чтобы раскрасить любую карту на глобусе так, что страны-соседки получат разные цвета?

Первый необходимый шаг в доказательстве этого факта ясен: нужно доказать, что на сфере нельзя нарисовать пять стран, любые две из которых граничат по отрезку. Если такая пятёрка стран существует, то мы соединим их столицы попарно — кратчайшими дорогами, и так получим вложение в сферу полного графа, натянутого на пять вершин.

Но такое вложение невозможно — ибо вложенный в сферу полный граф с четырьмя вершинами разбивает её на четыре тре-

угольные области. Куда бы мы ни поместили пятую вершину — из неё будут достижимы только три другие вершины, а четвёртая будет заслонена одним из рёбер четырёхвершинного графа.

Таково начало доказательства гипотезы Кэли о четырёх красках на сфере. Как пройти от этого начала к желанному концу? Сколько разных вариантов промежуточных карт придётся перебрать на индуктивном пути? Решить эту проблему Кэли не успел — по многим причинам; например, потому, что у него не было компьютера для перебора тысяч карт. Подходящий компьютер и подходящие к нему головы геометров-программистов появились на Земле через восемь десятилетий после Кэли — в глубоком кайнозое (1976 год), когда все математические динозавры давным-давно вымерли.

Но прежде чем вымер Кэли, последний из его друзей-динозавров — Джон Хивуд, молодой доцент Кембриджа — вдохновился успехами Римана и Клейна в классификации замкнутых поверхностей и решил разобраться с раскраской карт на любых поверхностях. Например, тор: сколько попарно граничащих стран можно на нём нарисовать? Сколько таких стран уместится на проективной плоскости или на бутылке Клейна?

Будучи опытным геометром, Хивуд быстро придумал довольно сложные карты на этих поверхностях. На торе он нашёл семь попарно граничащих стран, а на проективной плоскости — шесть. Вот как выглядят эти карты.

Проведём на торе три параллели и один меридиан. Эти четыре окружности пересекают поверхность тора на три длинные области — полосы, которые начинаются и кончаются на меридиане. Разрежем

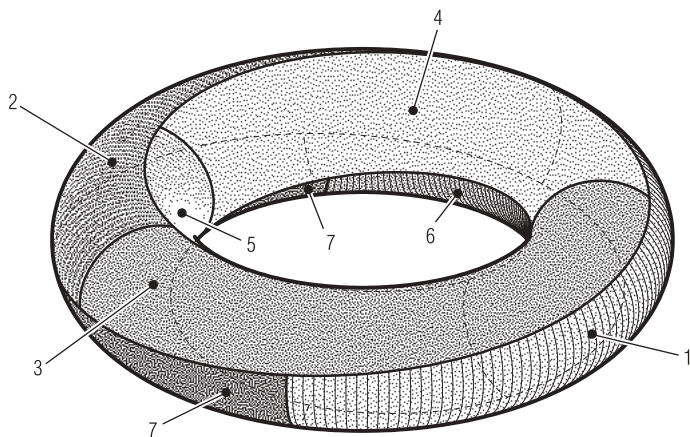


Рис. 19

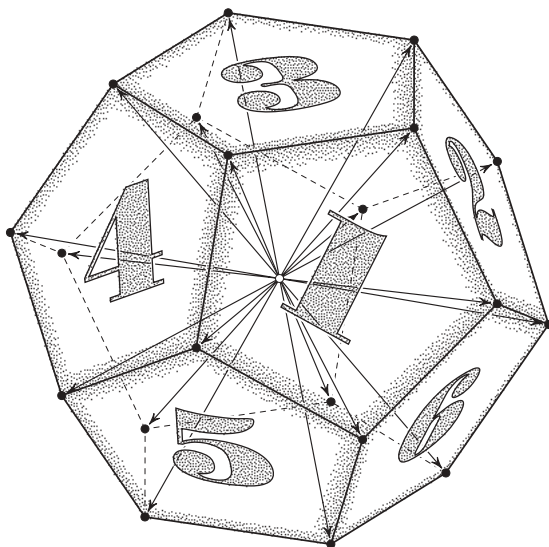


Рис. 20

тор по этому меридиану — и склеим его вновь, после поворота вдоль меридиана на  $120^\circ$ . В результате три страны-полосы склеятся в одну очень длинную полосу, трижды обматывающую тор вдоль его параллели и один раз — вдоль его меридиана. Теперь разрежем эту сверхдлинную полосу на семь равных частей поперечными отрезками. Поскольку  $3/7 < 1/2$ , то каждая из семи стран занимает на торе довольно скромное место: меньше его половины в длину, и одну треть — в ширину. Поскольку числа 3 и 7 взаимно просты и  $9/7 > 1$ , то любые две из этих семи стран имеют общий отрезок границы (рис. 19, рис. на 1-й стр. обложки). Вот и получилась на торе карта, которую невозможно правильно раскрасить менее чем семью цветами!

Чтобы создать сходную карту из шести стран на проективной плоскости, мы разобьём сферу на 12 пятиугольных стран — согласно граням, рёбрам и вершинам правильного додекаэдра. Этот многогранник центрально симметричен (рис. 20). Склеивая попарно все его диаметрально противоположные вершины, рёбра и грани, мы получаем разбиение проективной плоскости на шесть пятиугольных стран, каждая из которых граничит по ребру с любой другой страной.

Итак, образцовые карты Хивуда нарисованы. Теперь мы переходим к доказательству теоремы Хивуда о раскраске произвольных карт на замкнутой поверхности  $M$  с эйлеровой характеристикой  $\chi(M)$ . Формулировка теоремы такова.

- А. Если  $\chi(M) > 0$ , то любая карта на  $M$  правильно раскрашивается шестью цветами.  
 Б. Если  $\chi(M) = 0$ , то любая карта на  $M$  правильно раскрашивается семью цветами.  
 В. Если  $\chi(M) < 0$ , то любая карта на  $M$  правильно раскрашивается  $C(\chi)$  цветами, где

$$C(\chi) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rceil.$$

Из этой формулы видно, что в конце доказательства нам придётся решать некое квадратичное неравенство — притом решать его в целых числах. Но прежде чем мы до него доберёмся, нам нужно повторить довольно хитрые геометрические рассуждения Джона Хивуда.

**О п р е д е л е н и е.** Карта на поверхности  $M$  называется *регулярной*, если в каждой её вершине сходятся вместе три страны и три ребра, а каждая страна гомеоморфна кругу.

**З а м е ч а н и е.** Если любая регулярная карта на поверхности  $M$  правильно раскрашивается  $k$  разными красками, то и любая другая карта на этой поверхности правильно раскрашивается  $k$  красками.

**Д о к а з а т е л ь с т в о** показано на рис. 21.

Видно, что на новой регулярной карте каждая страна имеет не меньше соседей, чем имела её предшественница на старой — не регулярной карте. И если мы умеем правильно раскрасить новую карту  $k$  цветами — значит, мы можем это сделать и со старой, не регулярной картой. Заметим ещё одно полезное свойство регулярных карт: для них  $3B = 2P$ . Действительно, из каждой вершины регулярной карты исходят три ребра; пересчитав их по всем вершинам, мы получим удвоенное число рёбер карты, ибо каждое ребро мы учли в обоих его вершинах.

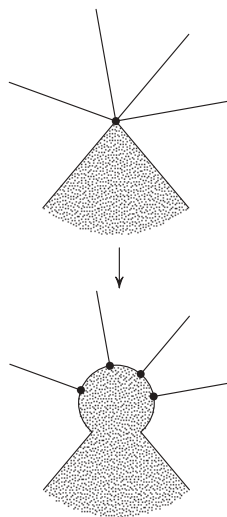


Рис. 21

## § 16

Теперь мы изложим основную геометрическую процедуру Хивуда. Для заранее выбранной поверхности  $M$  с эйлеровой характеристикой  $\chi$  он перебирает все возможные карты на ней, в порядке возрастания числа стран ( $\Gamma$ ) у этих карт.

Рассуждение ведётся путём индукции по  $\Gamma$ . Основной шаг индукции таков: если мы умеем правильно раскрасить любую карту на  $M$  с  $\Gamma - 1$  странами с помощью  $k$  цветов и если в данной регулярной карте с  $\Gamma$  странами нашлась хоть одна страна, число рёбер которой меньше, чем  $k$  — тогда и данную карту с  $\Gamma$  странами мы можем правильно раскрасить  $k$  цветами.

Как выполнить этот шаг индукции? Выбрав в карте  $K_1$  с  $\Gamma$  странами такую страну  $C$ , которая ограничена менее чем  $k$  рёбрами, мы стягиваем эту страну в точку. Это стягивание возможно, поскольку каждая страна карты  $K_1$  гомеоморфна кругу; ясно также, что стягивание круга в точку не изменяет поверхность  $M$ , в которой лежит этот круг. Значит, наше стягивание круга даёт нам новую карту  $K_2$  на той же поверхности  $M$  — быть может, не регулярную, но уже с  $\Gamma - 1$  странами.

По индуктивному предположению, мы умеем правильно раскрасить любую карту на  $M$  с  $\Gamma - 1$  странами — в том числе, карту  $K_2$  — с помощью  $k$  цветов. В той вершине карты  $K_2$ , которая получилась от стягивания страны  $C$ , сходятся вместе меньше чем  $k$  разных стран — тоже по предположению нашей индукции. Значит, для этой вершины мы можем выбрать «свободный» цвет — и окрасить им страну  $C$  в исходной карте  $K_1$  с  $\Gamma$  странами на поверхности  $M$ . Все прочие страны карты  $K_1$  мы раскрашиваем теми же цветами, какие мы использовали при раскраске их образцов на «стянутой» карте  $K_2$ .

Таково описание геометрической процедуры в одном шаге индукции Хивуда. Теперь нам нужно написать некое неравенство, которое делает этот шаг возможным. Вот оно — неравенство Хивуда:

$$k\Gamma > 6(\Gamma - \chi).$$

Смысл его таков: если для данной поверхности  $M$  с эйлеровой характеристикой  $\chi$  найдётся натуральное число  $k$  такое, что неравенство Хивуда верно для любого числа стран  $\Gamma$ , то любую регулярную карту на  $M$  можно правильно раскрасить  $k$  цветами.

Проверим, гарантирует ли неравенство Хивуда выполнимость геометрической процедуры Хивуда, описанной выше.

Вспомним, что  $\chi = B - P + \Gamma$ , и что  $3B = 2P$  для регулярной карты. Подставив эти соотношения в неравенство Хивуда, мы получаем:

$$6(\Gamma - \chi) = 6(P - B) = 6 \cdot \frac{P}{3} = 2P.$$

Итак, неравенство Хивуда принимает вид  $k\Gamma > 2P$ . Из этого неравенства видно, что в регулярной карте с  $\Gamma$  странами найдётся страна, ограниченная менее чем  $k$  рёбрами. Значит, неравенство Хивуда обеспечивает выполнимость геометрической процедуры Хивуда — стягивания одной страны в точку, с последующей раскраской новой и старой карт. Теперь вся геометрическая работа Хивуда и его индуктивные переходы между картами обоснованы нами. Осталась чисто арифметическая работа: выяснить, каким нужно брать число  $k$  для данной поверхности  $M$  с эйлеровой характеристикой  $\chi$ , чтобы для любой карты на ней с числом стран  $\Gamma$  выполнялось неравенство Хивуда  $k\Gamma > 6(\Gamma - \chi)$ .



Решать это неравенство относительно  $k$  нам придётся тремя разными путями — в зависимости от знака эйлеровой характеристики  $\chi = \chi(M)$ .

А. Пусть  $\chi(M) > 0$ . Это значит, что мы работаем со сферой или с проективной плоскостью. В этом случае нам достаточно взять  $k=6$  — тогда неравенство  $k\Gamma > 6(\Gamma - \chi)$  будет выполнено при любом значении  $\Gamma$ .

Б. Пусть  $\chi(M) = 0$ . Это значит, что мы работаем с тором или с бутылкой Клейна. В этом случае нам достаточно взять  $k=7$ , чтобы обеспечить неравенство  $k\Gamma > 6(\Gamma - \chi)$  для всех значений  $\Gamma$ .

В. Пусть  $\chi(M) < 0$ . Это значит, что мы работаем с кренделями или с теми неориентируемыми поверхностями, которые накрываются этими кренделями при склейке пар противоположащих точек кренделя.

В этом случае мы перепишем неравенство Хивуда в виде

$$k > 6 \left( 1 - \frac{\chi}{\Gamma} \right)$$

и заметим, что второе слагаемое в скобках неравенства положительно, но оно убывает с ростом  $\Gamma$ . Чтобы обеспечить выполнение этого неравенства при всех значениях  $\Gamma$ , нам достаточно обеспечить его при наименьшем осмысленном значении  $\Gamma_{\min} = k + 1$ , ибо любую карту с меньшим числом стран мы можем правильно раскрасить  $k$  цветами.

Итак, мы должны решить в целых числах неравенство

$$k > 6 \left( 1 - \frac{\chi}{k+1} \right).$$

Оно равносильно квадратичному неравенству  $k(k+1) > 6(k+1 - \chi)$ , или  $k^2 - 5k + 6(\chi - 1) > 0$ . Большой корень этого квадратного трёхчлена равен  $\frac{5 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2}$ . Наименьшее натуральное число, превосходящее этот корень или равное ему, выражается формулой

$$C(\chi) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rceil.$$

Такое число красок достаточно для раскраски любой карты на замкнутой поверхности  $M$  с эйлеровой характеристикой  $\chi(M) < 0$ . Например, для обычного кренделя с двумя «дырками»  $P_2$  мы получаем  $C=8$ , а для связной суммы трёх проективных плоскостей  $H_3$  мы получаем  $C=7$ . Заметим, что для тора тоже  $C=7$ , а для бутылки Клейна  $C=6$ : это единственный пример, где верхняя оценка Хивуда оказалась завышенной! Во всех прочих случаях она точна — даже для сферы, где формула Хивуда подсказывает нам не обоснованный, но верный ответ  $C=4$ .

Как положено последнему динозавру (и священнику англиканской церкви), Джон Хивуд не дождался до полного решения проблемы четырёх красок, которое появилось на заре компьютерной эры — в 1976 году и огорчило настоящих топологов. Они-то надеялись, что эта проблема Кэли потребует новых мощных алгебраических методов — быть может, даже введения в математику новых понятий, вроде фундаментальной группы! Но оказалось, что здесь достаточно усидчивой работы за компьютером — такова суть проблемы, и таков двадцатый век.

## § 17

Полтора года назад (1854) молодой и дерзкий геометр Георг Риман объявил программу создания новой науки — *топологии*. Он поставил главную задачу нового раздела геометрии: разобраться в строении произвольных многообразий так же хорошо или лучше, чем мы уже разобрались в строении замкнутых поверхностей! Сто лет назад (1905) матёрый геометр Анри Пуанкаре изобрёл необходимые алгебраические средства работы с многообразиями любой размерности. Это — группы гомотопий и гомологий. Первым примером этого рода стала фундаментальная группа  $\Pi(X)$  — она позволила различить две замкнутые поверхности относительно их гомеоморфизма. Наконец, 70 лет назад (1930) третий могучий зверь из класса млекопитающих — Марстон Морс — придумал геометрическую конструкцию, которая позволяет явно описать любое замкнутое многообразие произвольной размерности. С этого момента топология вступила в свой зрелый возраст: его можно назвать кайнозойской эрой, по аналогии с нынешним царством млекопитающих зверей на всей Земле. Что же сделали новые звери — топологи — за 70 лет бурного развития их науки? Насколько они сумели превзойти скромные открытия Римана и Пуанкаре, которые мы с вами разобрали на предыдущих страницах?

Первый крупный прорыв совершил в 1938 году англичанин Хаслер Уитни. Он доказал, что любое многообразие размерности  $k$  можно вложить в евклидово пространство размерности  $2k$  — почти так же, как мы с вами вложили проективную плоскость в четырёхмерное пространство. И эта оценка — неулучшаемая: существуют такие многообразия  $M^k$ , которые невозможно вложить в пространство  $\mathbb{R}^{2k-1}$  без самопересечений. Таковы, например, проективные пространства  $\mathbb{R}P^k$  при  $k=2^n$ ; в случае  $k=2$  мы с вами нечаянно натолкнулись на самую неукротимую из замкнутых поверхностей — проективную плоскость.

Кстати, мы с вами сумели погрузить проективную плоскость в трёхмерное евклидово пространство — расположить её там без изломов, хотя и с гладкими самопересечениями. Оказывается,

что и этот результат наилучший: при  $k=2^n$  проективное пространство  $\mathbb{R}P^k$  можно погрузить в евклидово пространство  $\mathbb{R}^{2k-1}$ , но нельзя погрузить в пространство  $\mathbb{R}^{2k-2}$ . Препятствием к такому погружению оказались особые элементы в группах гомологий проективных пространств — *характеристические классы* Уитни и Понтрягина, которые обобщают знакомую нам эйлерову характеристику и ориентацию замкнутой поверхности.

Как известно, аппетит приходит во время еды — во всяком случае, у млекопитающих зверей. Топологи тоже обладают этим качеством. Как только проблема вложения замкнутых многообразий была решена, они взялись за *проблему бордизма* этих же многообразий: каких алгебраических условий будет достаточно, чтобы замкнутое многообразие  $M^k$  было краем компактного многообразия  $W^{k+1}$ ? Не пригодятся ли и здесь характеристические классы Уитни и Понтрягина?

Оказывается, да! В 1954 году проблему бордизма замкнутых поверхностей решил молодой французский математик Рене Том — уроженец города Гренобля, где когда-то дерзкий Жан Франсуа Шампольон расшифровал древнеегипетские иероглифы. При этом молодой египтолог Шампольон опирался на открытия маститого англичанина — физика Томаса Юнга; а молодой тополог Рене Том опирался на открытие маститого россиянина — Льва Понтрягина, изобретателя характеристических классов.

Во время Второй мировой войны слепой математик Понтрягин (1908—1988) был эвакуирован в Казань и там тратил много времени на стояние в разных очередях: за обедом, за куском мыла и т. д. Чтобы не тратить это время попусту, Понтрягин постоянно размышлял о каких-нибудь геометрических задачах, например, о гомотопических группах сфер большой размерности. Вдруг он заметил, что эти группы (ещё никем не вычисленные) тесно связаны с бордизмами многообразий — но не простых, а оснащённых, вроде рассерженного ежа, из которого во все стороны торчат иголки. Зная строение всех замкнутых многообразий размерностей 1 и 2, Понтрягин сумел вычислить в уме первые две гомотопические группы сфер: обе они оказались изоморфны группе вычетов  $\mathbb{Z}_2$ . Не имея полной информации о строении многообразий размерности 3, Лев Понтрягин не сумел вычислить третью гомотопическую группу сфер. Она оказалась равна группе вычетов  $\mathbb{Z}_{24}$ . Это выяснил в 1950 году очередной молодой француз — Жан-Пьер Серр, используя новую разновидность топологической арифметики — спектральные последовательности, изобретённые учителем Серра — Жаном Лере.

Вычисления Серра были очень красивы — но они не были напрямую связаны с бордизмами гладких многообразий, как вычисления Понтрягина. Можно ли установить и здесь прямую связь

алгебры с геометрией? Эту задачу взялся решать Рене Том, когда ему не повезло: попав в автомобильную катастрофу, он оказался на несколько месяцев привязан к постели. В этом неприятном положении Рене Том остался наедине со своими мыслями — почти как Лев Понтрягин в эвакуации. Итог получился столь же удачный: Том сумел объединить алгебраическую технику Серра с геометрическими конструкциями Понтрягина и решил проблему бордизма гладких замкнутых многообразий. Оказалось, что любое замкнутое многообразие  $M^k$  либо ограничивает компактную плёнку  $W^{k+1}$ , либо оно бордантно какому-нибудь произведению проективных пространств — действительных или комплексных; при этом размерности всех сомножителей должны быть степенями двойки. Например, в размерности 3 все бордизмы тривиальны — т. е. всякое замкнутое многообразие  $M^3$  ограничивает некоторую плёнку  $W^4$ ; зато в размерности 4 есть три разных класса многообразий, не бордантных нулю или друг другу: их представители обозначаются  $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ ,  $\mathbb{R}P^4$  и  $\mathbb{C}P^2$ . Последнее из этих трёх многообразий — ориентируемое; так что бывают и ориентируемые многообразия, не ограничивающие никаких плёнок.

Все эти замечательные открытия выздоровевший Рене Том опубликовал в 1954 году. В этом же году Жан-Пьер Серр был удостоен высшей награды Международного союза математиков — Филдсовской медали. Тогда она впервые была присуждена топологу, и было уже ясно, что это не в последний раз.

И вот что любопытно: престарелый динозавр Джон Хивуд (1861—1955), который первый разобрался в раскраске карт на поверхностях, успел узнать о блестящих открытиях своих далёких наследников и преемников, успел порадоваться их триумфам! Подумать только: этот человек родился ещё при жизни Римана, он был всего на семь лет моложе Пуанкаре, на год старше Гильберта! И вот — прожил от высокого мезозоя до высокого кайнозоя, до великих открытий Понтрягина и Тома, Лере и Серра... Кстати, два героя-ровесника — Жан-Пьер Серр и Рене Том — родились незадолго до создания теории Морса; они благополучно здравствуют поныне, через полвека после своих первых триумфов, когда среди филдсовских лауреатов насчитывается уже более 10 топологов! Но их открытия и вдохновение — это тема для особого разговора. А читатели этой брошюры могут стать преемниками дел её героев — если увлекутся красотами новой математики так, как это случилось в прежние времена с Эйлером и Риманом, с Пуанкаре и Морсом, с Серром и Томом.

---